Wyznacznik Grama

M. Miśkiewicz

Twierdzenie o zamianie zmiennych [Str12, Tw. 5.22] mówi, że jeśli f jest funkcją całkowalną, a $\Phi\colon V \to U$ dyfeomorfizmem między dwoma otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^n$, to

$$\int_U f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_V (f \circ \Phi) |\det D\Phi| \, \mathrm{d}\lambda_n.$$

Analogiczny wzór na zamianę zmiennych zachodzi dla podrozmaitości [Str12, (6.4)]. Jeśli $M \subseteq \mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową podrozmaitością oraz $\Phi\colon V \to M$ jest parametryzacją jej fragmentu $M \cap U$ ($V \subseteq \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ są zbiorami otwartymi), to

$$\int_{M \cap U} f \, \mathrm{d}\sigma_m = \int_V (f \circ \Phi) \sqrt{\det\left(D\Phi^\top D\Phi\right)} \, \mathrm{d}\lambda_m.$$

Nietrudno się przekonać, że wielkość $\sqrt{\det\left(D\Phi^\top D\Phi\right)}$ (pierwiastek z wyznacznika Grama) pokrywa się z $|\det D\Phi|$ w przypadku $m = n$. Ta krótka notka poświęcona jest wyjaśnieniu, że i w ogólnym przypadku pierwiastek z wyznacznika Grama jest modułem z (odpowiedniego) wyznacznika.

Osoby znające pojęcie potęgi zewnętrznej mogą być zainteresowane uwagą na samym końcu, gdyż pojęcie to pozwala na dużo bardziej zwięzły opis.

Zadanie 1. (o wyznaczniku Grama)

(a) Załóżmy, że U, V są przestrzeniami liniowymi z iloczynem skalarnym, tego samego wymiaru, a $L\colon U \to V$ jest przekształceniem liniowym. Zdefiniujmy $|\det L|$ jako

$$|\det L| := \left|\det\left([L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\right)\right|,$$

gdzie $[L]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ jest macierzą L w pewnych bazach ortonormalnych $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ przestrzeni U, V. Sprawdzić, że definicja nie zależy od wyboru baz.

(b) Przekonać się, że nadal obowiązują wzory $|\det(L_1 L_2)| = |\det L_1| \cdot |\det L_2|$ oraz $|\det L^\top| = |\det L|$.

(c) Przyjmijmy teraz, że $V \subseteq W$, przekształcenie $E\colon V \hookrightarrow W$ jest włożeniem (tzn. $E(v) = v$) oraz $M := EL$. Dowieść, że $\det(M^\top M) = |\det L|^2$.

(d) Załóżmy, że różniczka pewnego przekształcenia $Df\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma rząd n (maksymalny). Oznaczmy przez $\overline{Df}\colon \mathbb{R}^n \to \operatorname{im} Df$ tę samą różniczkę rozumianą jako przekształcenie w mniejszą podprzestrzeń. Wykazać, że

$$\text{pierwiastek z wyznacznika Grama} = \sqrt{\det(Df^\top Df)} = |\det \overline{Df}|.$$

Uwaga. Jeśli rozważać przestrzenie liniowe z wybraną orientacją, to przez ograniczenie do baz dodatnio zorientowanych można zdefiniować $\det L$ bez modułu, z zachowaniem pozostałych własności. Przykładowo, dowolne przekształcenie $L\colon U \to U$ ma dobrze zdefiniowany wyznacznik $\det L = \det[L]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}$, i to niezależnie od wyboru orientacji U (zmiana orientacji na przeciwną wymusza zmianę obu baz ortonormalnych, co nie ma wpływu na znak).

Zadanie 2. Funkcja

$$f\colon (-1,1)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad f(t,\alpha) = (\sqrt{1-t^2}\cos\alpha, \sqrt{1-t^2}\sin\alpha, t)$$

parametryzuje sferę $\mathbb{S}^2$ z wyjątkiem biegunów $(0,0,\pm1)$.

(a) Wyznaczyć wyznacznik Grama $\det(Df^\top Df)$.

(b) Wyznaczyć wyznacznik $|\det \overline{Df}|$ poprzez wyrażenie wektorów $Df(1,0)$, $Df(0,1)$ w wybranej bazie przestrzeni stycznej do $\mathbb{S}^2$.

Wywnioskować, że pole czaszy sfery zakreślonej cyrklem o rozwartości r $(0 < r < 2)$ wynosi πr^2.

Uwaga. Arystoteles do wyznaczenia pola sfery stosował podejście z punktu b). Można o tym przeczytać w artykule Marka Kordosa *Piłka w puszce* (*Delta 4/2014*).

Prosta charakteryzacja dla zainteresowanych algebrą wieloliniową. Dla przestrzeni liniowej U i $k = 1, 2, \ldots$ definiuje się potęgę zewnętrzną $\Lambda^k U$ (jeśli $\dim U = n$, to $\dim \Lambda^k U = \binom{n}{k}$), a dla przekształcenia liniowego $L\colon U \to V$ definiuje się przekształcenie indukowane $\Lambda^k L\colon \Lambda^k U \to \Lambda^k V$. W szczególnym przypadku $L\colon U \to U$ i $k = \dim U$ przekształcenie $\Lambda^k L\colon \Lambda^k U \to \Lambda^k U$ prowadzi między dwiema przestrzeniami wymiaru 1, więc sprowadza się do domnażania przez pewien skalar, który oznaczamy przez $\det L$.
Jeśli U jest wysażone w iloczyn skalarny, to możemy w tę strukturę wyposażyć również $\Lambda^k U$, a moduł wyznacznika można scharakteryzować równoważnie poprzez normę $\Lambda^k L$ (dla $k = \dim U$), czyli

$$|\det L| = \|\Lambda^k L\|_{\mathrm{op}} = \sup_{0 \neq e \in \Lambda^k U} \frac{\|(\Lambda^k L)(e)\|_{\Lambda^k U}}{\|e\|_{\Lambda^k U}}.$$

Zaletą tego punktu widzenia jest, że U i V nie muszą być tą samą przestrzenią, a nawet, że nie muszą mieć tego samego wymiaru. Można się przekonać, że w przypadku $L\colon U \to V$ oraz $k = \dim U$ mamy

$$\sqrt{\det(L^\top L)} = |\det L| = \|\Lambda^k L\|_{\mathrm{op}}.$$

W tym przypadku dziedzina $\Lambda^k L$ jest jednowymiarowa, więc zamiast supremum można rozważać $\|(\Lambda^k L)(e)\|_{\Lambda^k V}$ (gdzie e jest wektorem jednostkowym w $\Lambda^k U$).

Literatura

[Str12] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II. *Skrypt wykładu dostępny online*, 2011/2012.